1 Zadania Dodatkowe

Zadania nie są obowiązkowe. Każde zadanie jest warte 1 punkt. Można oddać do 3 zadań.

Zadanie 1 (Ciągłość)**.** Dla zbioru X niech $\mathcal{T}^X_{Zar}$, będzie topologią Zariskiego na X czyli

$$\mathcal{T}^X_{Zar} = \{A \subseteq X | \text{Dopełnienie } X - A \text{ jest skończone}\} \cup \{\varnothing\} .$$

Niech $I = [0,1]$ będzie odcinkiem a $K = [0,1]^2$ kwadratem. Rozważmy kwadrat K z topologią produktową $\mathcal{T}^I_{Zar} \times \mathcal{T}^I_{Zar}$, oraz z topologią Zariskiego $\mathcal{T}^K_{Zar}$.

a) Uzasadnić, że

$$\mathrm{id}\colon \left(K, \mathcal{T}^I_{Zar} \times \mathcal{T}^I_{Zar}\right) \to \left(K, \mathcal{T}^K_{Zar}\right)$$

jest funkcją ciągłą.

b) Uzasadnić, że

$$\mathrm{id}\colon \left(K, \mathcal{T}^I_{Zar} \times \mathcal{T}^I_{Zar}\right) \to \left(K, \mathcal{T}^K_{Zar}\right)$$

nie jest homeomorfizmem.

Zadanie 2 (Zwartość)**.** Niech $B = B((0,0);1) \subset (\mathbb{R}^2, d_{eu})$ będzie otwartą kulą euklidesową o środku $(0,0)$ i promieniu 1. Niech $X = B \cup \{\infty\}$. Niech $\mathcal{T}_X$ będzie rodziną podzbiorów X daną przez

$$U \in \mathcal{T}_X \iff \begin{cases} \infty \notin U \,, \text{ oraz } U \text{ jest otwarty w } B \,, \text{ lub} \\ \infty \in U \,, \text{ oraz } B - U \text{ jest zwarty} \,. \end{cases}$$

a) Uzasadnij, że $\mathcal{T}_X$ to topologia na X.

b) Wykaż, że przestrzeń $(X, \mathcal{T}_X)$ jest zwarta.

Uwaga: Przypominam, że w definicji zwartości zawiera się warunek Hausdorffa.

Zadanie 3 (Przestrzenie ilorazowe)**.** Niech $(X, \mathcal{T}_X)$ będzie przestrzenią z poprzedniego zadania. Niech D będzie dyskiem jednostkowym, a S^1 okręgiem jednostkowym:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\} \,, \qquad S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

a) Zdefiniujmy funkcję $h : D \to X$ wzorem:

$$h(a) = \begin{cases} a \text{ dla } a \notin S^1 \,, \\ \infty \text{ dla } a \in S^1 \,. \end{cases}$$

Uzasadnij, że przekształcenie $h : (D, d_{eu}) \to (X, \mathcal{T}_X)$ jest ciągłe.

b) Uzasadnij, że $(X, \mathcal{T}_X)$ jest homeomorficzna z D/S^1

Uwaga: W zadaniu 3 można używać tezy zadania 2.
Uwaga: Na ćwiczeniach (chyba) pokazywaliśmy, że D/S^1 jest homeomorficzna z S^2. Operacja opisana w poprzednim zadaniu to uzwarcenie jednopunktowe. Te dwa zadania pokazują, że uzwarcenie jednopunktowe kuli euklidesowej to sfera.

Zadanie 4 (Przestrzenie ilorazowe i spójność)**.** Dla przestrzeni X zdefiniujmy stożek nad X jako

$$CX := X \times [0,1]/X \times \{1\}\,.$$

a) Uzasadnić, że dla dowolnej przestrzeni X stożek CX jest łukowo spójny.

b) Niech

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$$

będzie okręgiem jednostkowym, a Y sumą rozłączną dwóch okręgów

$$Y = S^1 \sqcup S^1 \simeq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-2)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+2)^2 + y^2 = 1\}\,.$$

Uzasadnij, że stożki CY i CS^1 nie są homeomorficzne.

Zadanie 5 (Zupełność)**.** Rozważmy zbiór

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap (0,1]\,, 0 < y < x\}\,.$$

Niech d_k będzie metryką kolejową, a d_r metryką rzeki.

a) Czy przestrzeń (X, d_k) jest zupełna? Czy jest metryzowalna w sposób zupełny?

b) Czy przestrzeń (X, d_r) jest zupełna? Czy jest metryzowalna w sposób zupełny?

Hint: Dokładnie 3 z 4 odpowiedzi są takie same.

Zadanie 6 (Homotopie)**.** Rozważmy sferę n-wymiarową

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = 1\}$$

Niech $A : S^n \to S^n$ będzie przekształceniem antypodu, czyli:

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (-x_0, -x_1, \ldots, -x_n)\,.$$

Niech $T : S^n \to S^n$ będzie przekształceniem bez punktów stałych, czyli

$$\forall_{x \in S^n} T(x) \neq x\,.$$

Uzasadnij, że przekształcenia T i A są homotopijne.
Uwaga: Można oddać dowód tylko dla $n = 1$ ale będzie warty 0,5 punkta.